2. DETERMİNANTLAR

BİR MATRİSİN DETERMİNANTI

Her nxn tipindeki (kare) matrisi, onun determinantı diyeceğimiz bir reel sayı ile ilişkilendirebiliriz. Bu sayının değeri, bize matrisin singüler olup olmadığını söyleyecek şekilde tanımlanmalıdır. Genel tanımdan önce aşağıdaki durumları düşünelim;

1. Durum! Eğer $A=(a)$ 1×1 tipinde bir matris ise A'nın tersinin olması için gerek ve yeter şart $a\neq0$ olmasıdır. Bu yüzden A'nın determinantını ($\det(A)$ ile göstereceğiz)

$$\det(A)=a$$

olarak tanımlarsak, A'nın tersinin olması için gerek ve yeter şart $\det(A)\neq0$ olmasıdır.

2. Durum: 2x2 tipindeki

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter şart satırca birim matris I_2'ye denk olmasıdır. Eğer $a_{11} \neq 0$ ise

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \end{bmatrix}$$ $a_{11} \neq 0$ olduğundan bu matrisin birim matrise satırca denk

olması için gerek ve yeter şart $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \neq 0$ olmasıdır. Eğer $a_{11}=0$ ise

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{12} \end{bmatrix}$$ bu matrisin birim matrise satırca denk olması için gerek ve yeter şart $a_{21}a_{12} \neq 0$ olmasıdır. Sonuçta ~~her~~ 2x2 tipinde bir A matrisinin determinantını

$$\det(A) = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

olarak tanımlanırsak, A'nın tersinin olması için gerek ve yeter şart $\det(A) \neq 0$ olmasıdır.

71

3. durum: 3x3 tipindeki bir

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter şart satırca birim matris I_3'e denk olmasıdır. 2. durumdaki benzer işlemler yapılırsa,

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}$$

olarak tanımlanabilir, bu durumda A matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter şart $\det(A)\neq 0$ olmasıdır.

72

B Yukardakilere benzer olarak $n\times n$ tipindeki kare matrislerin determinantını $n>3$ için tanımlayalım. Bunun için önce 2x2'lik matrisin determinantına bir daha göz atalım. 2x2'lik

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matrisin determinantını 1x1'lik matrisler yardımıyla tanımlayabiliriz;

$$M_{11}=(a_{22}) \qquad M_{12}=(a_{21})$$

olarak tanımlarsak

$$\det(A)=a_{11}\det(M_{11})-a_{12}\det(M_{12})$$

73

olacaktır. Benzer şekilde 3x3'lük matrislerin, 2x2'lik matrisler yardımıyla determinantını yazabiliriz.

$$M_{11}=\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{12}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{13}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\det(A)=a_{11}\det(M_{11})-a_{12}\det(M_{12})+a_{13}\det(M_{13})$$

Tanım: $A=(a_{ij})$ $n\times n$ tipinde matris olsun ve M_{ij}, a_{ij}'yi içeren sütun ve satırın silinmesi ile elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ tipinde matrisi göstersin. M_{ij}'nin determinantına a_{ij}'nin <u>minörü</u> denir. a_{ij}'nin <u>kofaktörü</u> A_{ij} ile gösterilir ve

74

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$$

ile tanımlanır.

Buna göre 2x2'lik matrisin determinantı

$$\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

ve 3x3'lük matrisin determinantı

$$\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

olacaktır.

A matrisinin determinantını $|A|$ ile de gösterebiliriz. $\det(A)=|A|$

Tanım: Bir nxn tipindeki A matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde tanımlanan ve det(A) ile gösterilen bir skalerdir.

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & , n=1 \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} & , n>1 \end{cases}$$

Burada

$$A_{1j} = (-1)^{1+j} \det(M_{1j}) \quad j=1,2,\dots,n$$

A matrisinin birinci satırındaki elemanların kofaktörleridir.

Örnekler: 1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det(3) = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det(-1) = (-1)(-1) = 1$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$
$$= 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \det(M_{21}) = (-1) \det(1)$$
$$= -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \det(M_{22}) = \det(2) = 2$$

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12}$$
$$= a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22}$$
$$= (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 7$$

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad |A| = ?$

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12}$$
$$A_{11} = (-1)^{1+1} \det(3) = 3$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det(1) = -1$$

$$|A| = 2 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) = 0$$

1. örnekteki matrisin tersi var

bu // // // yoktur.

79

3) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(A) = ?$

$|A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \det\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= -6$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-6) = 6$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$

80

$|A| = 3.(-6) + 1.6 + 2.6 = 0$

$|A| = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}$

$= a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}$

$= a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32}$

Teorem: $n \geq 2$ olmak üzere A $n \times n$ tipinde bir matris ise A'nın determinantı

$\det(A) = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$

$= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$

$i, j = 1, 2, \dots, n$

dır.

Örk:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad |A| = ?$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$= \underset{0}{\underset{\|}{a_{13}}} A_{13} + \underset{0}{\underset{\downarrow}{a_{23}}} A_{23} + \underset{3}{\underset{\downarrow}{a_{33}}} A_{33} + \underset{0}{\underset{\downarrow}{a_{43}}} A_{43}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$b_{21} A_{21}$

$$= (-2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A| = 3 \cdot (-2) = -6$$

Teorem: A nxn tipinde matris ise ~~det(A^T)~~

$$\det(A^T) = \det(A)$$

dır.

Örk: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad |A| = 7$

$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad |A^T| = 7$

83

Teorem: Eğer A nxn tipinde üçgensel matris ise A'nın determinantı köşegen elemanların çarpımına eşittir.

ört:
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 100 \\ 0 & 4 & 50 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad |A| = ?$$

$$|A| = 1 \cdot 4 \cdot (-2) = -8$$

84

Teorem: A nxn tipinde bir matris olsun.

a) A'nın bir sütunu veya satırı sıfır elemanlardan oluşmuşsa $|A|=0$ dır.

b) A'nın herhangi iki sütunu veya herhangi iki satırı birbirinin katı ise $|A|=0$ dır.

ört: 1) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad |A|=0$

2) $B=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & -3 & 6 & 2 \\ 12 & 8 & 9 & 9 \\ 4 & 10 & 3 & 12 \end{bmatrix} \qquad |B|=0$

Determinantın özellikleri:

Teorem: A nxn tipinde bir matris ise

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\dots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}\det(A), & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

Örk! $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=|A|$$
$$1\cdot 1+2\cdot(-3)=-5$$

$A_{11}=1 \quad A_{12}=-3$

$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}=0$$
$$3\cdot 1+1\cdot(-3)=0$$

1. Satır işlemi; $E=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$

$$EA=\begin{bmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{bmatrix}$$

$\det(EA)=-\det(A)$

Aynı matriste $=\det(E)\cdot\det(A)$

Herhangi iki satırın yerini değiştirirsek yeni elde edilen matrisin determinantı

87

ilk matrisin determinantının (-1) ile çarpılmasına eşittir. örk: $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix} \rightarrow |B|=-7$

2. Satır işlemi; $E=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$

$$E.A=\begin{bmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

$$\det(E.A)=\alpha.\det(A)$$
$$=\det(E)\det(A)$$

Bir matriste herhangi bir satırı sıfırdan farklı bir sayı ile çarptığımızda

88

yeni elde edilen matrisin determinantı ilk matrisin determinantının α sayı ile çarpılmasına eşittir.

örk: $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -5 & 15\end{bmatrix}$

$|A|=7$ $|B|=35$

3. Satır işlemi; $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha & 1\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$

$$EA=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ \alpha a_{11}+a_{21} & \alpha a_{12}+a_{22}\end{bmatrix}$$

$$\det(EA) = \det A = \det(E)\cdot\det(A)$$

örk: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -3 & 16 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$|B| = 7$

Teorem: Bir $n\times n$ tipindeki A matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart $\det(A)=0$ olmasıdır.

Teorem: A ve B $n\times n$ tipinde matrisler ise

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$$

dir.

örk: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = -5$ $|B| = -1$

$|AB| = |A|\cdot|B| = (-5)(-1) = 5$

$A\cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ $|AB| = 5$

Örk:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ +3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2 \quad |B| = -\frac{1}{2}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} \qquad |AB| = |A||B|$$

Kramer kuralı:

A $n \times n$ tipinde bir matris olsun. A matrisinden aşağıdaki gibi elde edilen yeni matrise A'nın eki denir ve

ekA ile gösterilir.

$$ekA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A.(ekA) = \det(A).I$$

Eğer A'nın tersi varsa

$$A^{-1} = \frac{ekA}{\det(A)}$$

dır.

 örk: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad ekA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$

$ekA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = ?$

$|A| = -5$

$$A^{-1} = \frac{ekA}{|A|} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{bmatrix}$$

Teorem: A $n \times n$ tipinde tersi olan bir matris ve $b \in \mathbb{R}^n$ olsun.

A'nın i. sütununun yerine b yazılarak elde edilen matrisi A_i ile gösterelim. Eğer $Ax = b$'nin tek çözümü

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ise}$$

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

dır. $\left(x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \right)$

95

Örk: $-2x_1+3x_2-x_3=1$ lineer sistemini
$x_1+2x_2-x_3=4$ kramer kuralı
$-2x_1-x_2+x_3=-3$ ile çözünüz.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}1\\4\\-3\end{bmatrix} \qquad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 3 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 7 & -3\\ 0 & +3 & -1\end{vmatrix}$$

96

$$|A|=-\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 7 & -3\\ 0 & 0 & 2/7\end{vmatrix}=(-1)\ 1\cdot 7\cdot \frac{2}{7}=-2$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 4 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-4$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 4 & -1\\ -2 & -3 & 1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-6$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ -2 & -1 & -3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-8$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

lineer denklem sisteminin çözümüdür.